Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

Tema A - 31/08/2021
Tempo a disposizione: 2h 30min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova e prima del termine del termine della stessa.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $4y'' + y = e^{-\frac{1}{2}} - 4y' + 289\cos(2x)$

1.2 Trovare la soluzione che soddisfa le seguenti condizioni di Cauchy e calcolarne il dominio:

$$y(0) = -15 \quad ; \quad y'(0) = 16$$

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{4}t^2, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right), \quad \text{se } t \in [-4\ ,\ 4]\,;$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

2.2 Determinare l'equazione cartesiana del supporto della curva e disegnarlo indicando il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = -2$.

2.4 Sia $f(x,y) = \sqrt{x - \frac{\pi^2}{4}y^2 + \frac{\pi^2}{4}}$. Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f$.

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

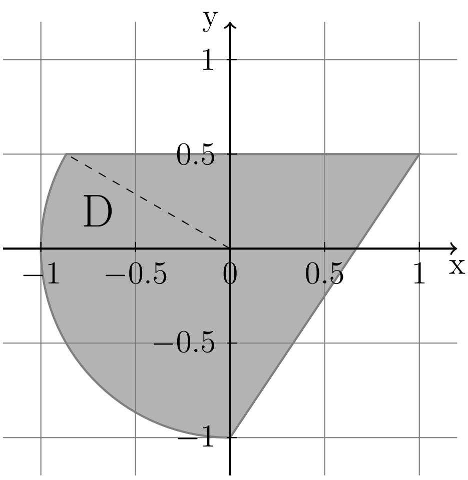
3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(1,0)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'area e il baricentro di D.



Soluzioni

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $4y'' + y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 4y' + 289\cos(2x)$

L'eq. caratteristica dell'eq. omogenea associata è (2 punti): $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ che ha soluzione doppia $\lambda = -1/2$. Quindi le soluzioni dell'omogenea associata sono:

$$z(x) = C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Per trovare la soluzione particolare si usa il metodo di somiglianza:

$$\bar{y}(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) + D, \quad A, B, D \in \mathbb{R}$$

Le cui derivate sono:

$$\bar{y}'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$
$$\bar{y}''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$$

Sostituendo si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -15A - 8B = 0 \\ -15B + 8A = 289 \\ D = \mathrm{e}^{-1/2} \end{cases} \implies A = 8; B = -15; D = \mathrm{e}^{-1/2}$$

L'integrale generale quindi è:

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 8\sin(2x) - 15\cos(2x) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

1.2 Trovare la soluzione che soddisfa le seguenti condizioni di Cauchy e calcolarne il dominio:

$$y(0) = -15 \quad ; \quad y'(0) = 16$$

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} C_1 - 15 + \mathrm{e}^{-1/2} = -15 \\ -\frac{1}{2}C_1 + C_2 + 16 = 16 \end{cases} \implies C_1 = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}; C_2 = -\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} + 8\sin(2x) - 15\cos(2x) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

il cui dominio è $\mathbb{R}$.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita da

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{4}t^2, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right), \quad \text{se } t \in [-4\ ,\ 4]\,;$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

Continuità, chiusura, semplicità e regolarità si possono dedurre facilmente dal grafico del supporto.

Le componenti di $\mathbf{r}$ sono continue, quindi anche γ è continua.

Si ha $\mathbf{r}(-4) = (4, 0) = \mathbf{r}(4) = (0, 0)$, quindi γ è chiusa.

Per la semplicità, si può notare che $\mathbf{r}(-2) = \mathbf{r}(2) = (1, 0)$, quindi non è semplice. Tali valori di t si possono trovare anche facendo i conti: dalla prima componente abbiamo

$$\frac{1}{4}t_1^2 = \frac{1}{4}t_2^2 \implies t_1 = \pm t_2 \implies t_1 = t_2 \ \vee t_1 = -t_2$$

Dalla seconda componente:

$$\sin(\frac{\pi}{2}t_1) = \sin(\frac{\pi}{2}t_2) \implies \frac{\pi}{2}t_1 = \frac{\pi}{2}t_2 + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{2}t_1 = \pi - \frac{\pi}{2}t_2 + 2k, \ k \in \mathbb{Z}$$

Utilizzando l'uguaglianza $t_1 = -t_2$ si ha:

$$-t_2 = t_2 + 4k \ \vee \ -t_2 = -t_2 + 4k$$

Quindi i punti in cui la curva si interseca sono tali per cui

$$\begin{cases} t_1 & = -2k \\ t_2 & = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Per $k = 1$ si ha $(t_1 = -2, t_2 = 2)$.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente a $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t\right)$$

La prima componente del vettore velocità si annulla solo per $t = 0$, ma $\mathbf{r}'(0) = (0, \frac{\pi}{2}) \neq (0, 0)$, quindi la curva è regolare.

2.2 Determinare l'equazione cartesiana del supporto della curva e disegnarlo indicando il verso di percorrenza.

Per scrivere l'equazione del supporto di $\mathbf{r}(t)$ notiamo che

$$x = \left(\frac{t}{2}\right)^2 \implies \frac{t}{2} = \pm\sqrt{x}$$

Sostituendo nella seconda componente otteniamo:

$$y = \sin(\pi(\pm\sqrt{x})) = \pm\sin(\pi\sqrt{x}), \text{ con } x \in [0,4]$$

Il supporto quindi si può ottenere dal grafico di $y = \sin(\pi\sqrt{x})$ e poi, per simmetria, $y = -\sin(\pi\sqrt{x})$.

Per fare il grafico si può notare che:

- $y = 0$ per $\pi\sqrt{x} = \pi + k\pi \implies x = (1+k)^2 = \{0, 1, 4\}, \; k \in [-1, 0, 1]$.
- $y = 1$ (massimi relativi) per $\pi\sqrt{x} = \pi/2 + 2k\pi \implies x = 1/4$.
- $y = -1$ (minimi relativi) per $\pi\sqrt{x} = 3\pi/2 + 2k\pi \implies x = 9/4$.

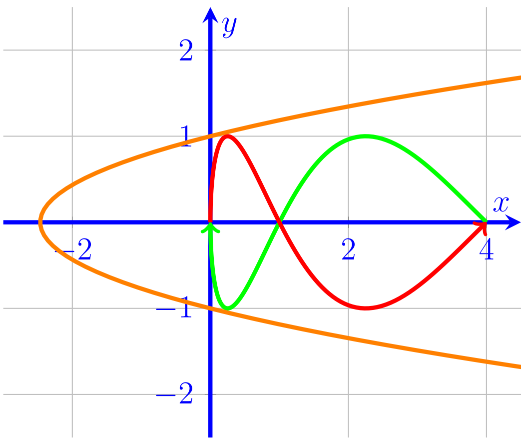


Figura 1: Supporto della curva parametrica: $y = -\sin(\pi\sqrt{x})$ in rosso (viene percorsa per prima) e $y = \sin(\pi\sqrt{x})$ in verde (viene percorsa successivamente). In arancione il bordo del dominio di $f(x,y)$ della domanda 2.4.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = -2$.

Si ha $\mathbf{r}(-2) = (1,0)$ e $\mathbf{r}'(2) = (-1, -\frac{\pi}{2})$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - (t+2) \\ y(t) = -\frac{\pi}{2}(t+2) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana è $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}$.

2.4 Sia $f(x,y) = \sqrt{x - \frac{\pi^2}{4}y^2 + \frac{\pi^2}{4}}$. Verificare che il sostegno della curva γ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma f$. Il dominio di $f(x,y)$ è

$x \geq \frac{\pi}{4}y^2 - \frac{\pi}{4}$ che rappresenta l'area interna alla parabola $x = \frac{\pi^2}{4}y^2 - \frac{\pi^2}{4}$ (asse di simmetria orizzontale, vertice in $(0, -\frac{\pi^2}{4})$, intersezioni con asse y in $(0, \pm 1)$. Dalla figura 1 si può vedere che il supporto è contenuto nel dominio.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{r}_1} f(x,y)\,d\mathbf{s} &= \int_{-4}^{4} f(\frac{1}{4}t^2, \sin(\frac{\pi}{2}t))\|\mathbf{r}_1'\|\,dt && (1)\\
&= \int_{-4}^{4} \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + \frac{\pi^2}{4}(1-\sin^2(\frac{\pi}{2}t)}\sqrt{\frac{1}{4}t^2 + \frac{\pi^2}{4}\cos^2(\frac{\pi}{2}t)}\,dt = && (2)\\
&= \int_{-4}^{4} \frac{1}{4}t^2 + \frac{\pi^2}{4}\cos^2(\frac{\pi}{2}t)\,dt = && (3)\\
&= \left[\frac{1}{12}t^3\right]_{-4}^{4} + \int_{-4}^{4} \frac{\pi^2}{8}(\cos(\pi t)+1)\,dt = && (4)\\
&= \frac{1}{12}(4)^3 + \frac{1}{12}(4)^3 + \frac{\pi^2}{8}[\frac{1}{\pi}\sin(\pi t) + t]_{-4}^{4} = && (5)\\
&= \frac{32}{3} + \pi^2 && (6)
\end{aligned}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

Per il dominio dobbiamo imporre

$$4 - x^2 - 4y^2 > 0 \implies \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1|$$

Il dominio di f è $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1\}$ che rappresenta la porzione di piano contenuta all'iterno dell'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi 2, 1.

La funzione è $\mathcal{C}^2$ nella parte interna del dominio perché la radice non è derivabile quando l'argomento è nullo.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2-4y^2}} \\ -4\dfrac{4y}{\sqrt{4-x^2-4y^2}} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottiene il punto critico $P = (0,0)$ che è all'interno del dominio.

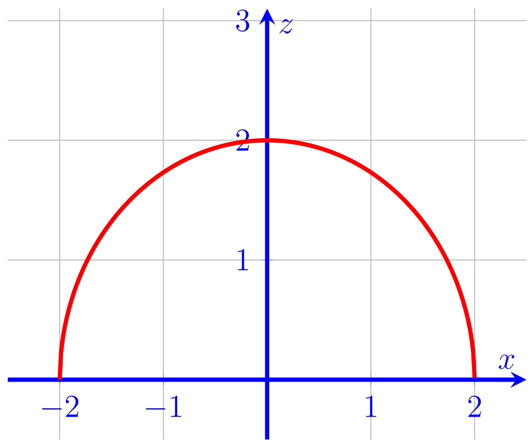


Figura 2: Sezione $y = 0$, $z = \sqrt{4 - x^2}$

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tale punto. In un punto (x, y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-Q + x(-x/Q)}{Q^2} & \frac{x(-4y/Q)}{Q^2} \\ \frac{x(-4y/Q)}{Q^2} & \frac{-4Q + 4y(-4y/Q)}{Q^2} \end{pmatrix}$$

dove si è posto $Q(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

- P_1:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  $\det(H_f(0, 2)) = 1 > 0$ e il primo termine è < 0. Quindi H_f è definita negativa in P_1 e P_1 è punto di massimo locale.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(1, 0)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\nabla f(1,0)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

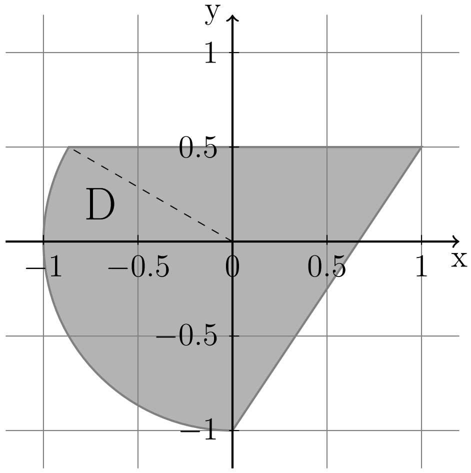
Quindi il versore di massima crescita in $(1, 0)$ è:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo sviluppo di Taylor del primo ordine in $(1, 0)$ è

$$T_1(x,y) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

Problema 4 (6 punti)



Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare l'area e il baricentro di D.

Il dominio D si può scrivere come

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le \frac{1}{2}, -\sqrt{1-y^2} \le x \le \frac{2y+2}{3}\}$$

Area:

$$\int\int_D dx\,dy = \int_{-1}^{1/2} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{2y+2}{3}} dx \right) dy =$$
$$\int_{-1}^{1/2} [x]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{2y+2}{3}} dy =$$
$$\int_{-1}^{1/2} \frac{2y+2}{3} + \sqrt{1-y^2}\, dy =$$
$$[\frac{1}{3}(y^2+2y)]_{-1}^{1/2} - \int_{3\pi/2}^{5\pi/6} \cos(t)\cos(t)\,dt =$$
$$[\frac{1}{3}(y^2+2y)]_{-1}^{1/2} - \frac{1}{2}\int_{3\pi/2}^{5\pi/6} \cos(2t)+1\,dt =$$
$$[\frac{1}{3}(y^2+2y)]_{-1}^{1/2} - \frac{1}{2}[\frac{\sin(2t)}{2}+t]_{3\pi/2}^{5\pi/6} =$$
$$\frac{1/4+1-1+2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{5\pi}{12} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}$$

Per il calcolo del baricentro calcoliamo $\int\int_D x\,dx\,dy$ e $\int\int_D y\,dx\,dy$

$$\int\int_D x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1/2}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{2y+2}{3}} x\,dx\right)dy =$$
$$\int_{-1}^{1/2}\left[x^2/2\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{2y+2}{3}} dy =$$
$$\int_{-1}^{1/2}\frac{(2y+2)^2}{18} - \frac{1-y^2}{2}\,dy =$$
$$[\frac{1}{6*18}(2y+2)^3 - \frac{1}{2}y + \frac{y^3}{6}]_{-1}^{1/2}$$
$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{1}{6} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16}$$

$$\int\int_D y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1/2}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{2y+2}{3}} y\,dx\right)dy =$$
$$\int_{-1}^{1/2} y\,[x]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{2y+2}{3}} dy =$$
$$\int_{-1}^{1/2} y\frac{2y+2}{3} + y\sqrt{1-y^2}\,dy =$$
$$[\frac{2}{9}y^3 + \frac{1}{3}y^2]_{-1}^{1/2} - \int_{3\pi/2}^{5\pi/6}\sin(t)\cos^2(t)\,dt =$$
$$[\frac{2}{9}y^3 + \frac{1}{3}y^2]_{-1}^{1/2} + [\frac{\cos^3(t)}{3}]_{3\pi/2}^{5\pi/6} =$$
$$\frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{24} = -\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Quindi il baricentro ha coordinate: $\left(-\frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}}, \frac{-\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{3}}\right)$